Si $x \le 1$ alors $g(x) \le g(1) = 0$

x	-∞		1		+∞
g(x)		-	0	+	

● $f(x) = 2\sqrt{3+x^2} - x$

a) $x^2+3>0$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = 2 \times \frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{3+x^2}} - 1 = g(x)$$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

T.V:

x	−∞		1		+∞
f'(x)		−	0	+	
f(x)	+∞	↘	3	↗	+∞

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2\sqrt{3+x^2} - x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \underbrace{\left(2\sqrt{\frac{3}{x^2}+1} - 1 \right)}_{1} = +\infty$$

b) $T : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$= -2(x+1)+5 \Rightarrow \boxed{y = -2x+3}$

Exercice n° 17

$$f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$$

1) a) signe de x^2+x

x	+∞		−1		0		+∞
x^2+x		+	0	−	0	+	

*/ Dérivabilité à gauche en 0

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-(x^2+x)+1}{-x+1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2-x+1+x-1}{x(-x+1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{-x+1} = 0 = f_g'(0)$$

*/ Dérivabilité à droite en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2+x+1}{x+1} - 1}{x-0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+x+1-x-1}{x(x+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 = f_d'(0)$$

Conclusion:

$f_g'(0) = f_d'(0)$ Donc f est dérivable en 0

et $f'(0) = 0$.

*/ Dérivabilité à gauche en -1 :

$$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{\frac{x^2+x+1}{-x+1} - \frac{1}{2}}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^-} \frac{2(x^2+x+1)+x-1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^-} \frac{2x^2+3x+1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^-} \frac{2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^-} \frac{2x+1}{2(-x+1)} = -\frac{1}{4} = f_g'(-1)$$

*/ Dérivabilité a droite en -1 :

$$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to (-1)^+} \frac{-2x^2-2x+2+x-1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} \frac{-2x^2-x+1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} \frac{-2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} \frac{-2x+1}{2(-x+1)} = \frac{3}{4} = f_d'(-1)$$

Conclusion:

$f_g'(-1) \neq f_d'(-1)$ donc f non dérivable en $x_0 = -1$.

b) Au point d'abscisse 0, C_f admet une tangente horizontale. $y = 0$

Au point d'abscisse $x_0 = -1$, C_f admet deux demi -tangentes de coefficients directeurs respectives $-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn